Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

EXAMEN FINAL - 22/03/2024

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:..

TEMA 1

1	2		3		4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- Todas las respuestas deben estar JUSTIFICADAS.

EJERCICIO 1: Dados los polinomios $p(x) = (4\alpha + \beta)\, x^2 + 5x + 3$, $q(x) = (x - 3)(2x + 1)$ y $r(x) = (\alpha - \beta)\, x^3 + \gamma x - 1$, determinar α, β y γ para que los polinomios p y q sean opuestos, r tenga como raíz a $x = 1$ y r sea divisible por el polinomio $t(x) = 2x - 4$.

EJERCICIO 2: Sea f una función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos $(3, 0)$ y $(5, 1)$. Sabiendo que

$$(g \circ f^{-1})(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4} - 25}$$

(a) Determinar el dominio de $(g \circ f^{-1})$.

(b) Resolver la ecuación $g(x) \cdot f^{-1}(x) = 0$.

EJERCICIO 3:

(a) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes. Sabiendo que la longitud de $\vec{v}$ es igual a $\sqrt{3}$ y que $(\vec{v} - \vec{w})$ es ortogonal a $\vec{w}$, calcular el módulo de $\vec{w}$.

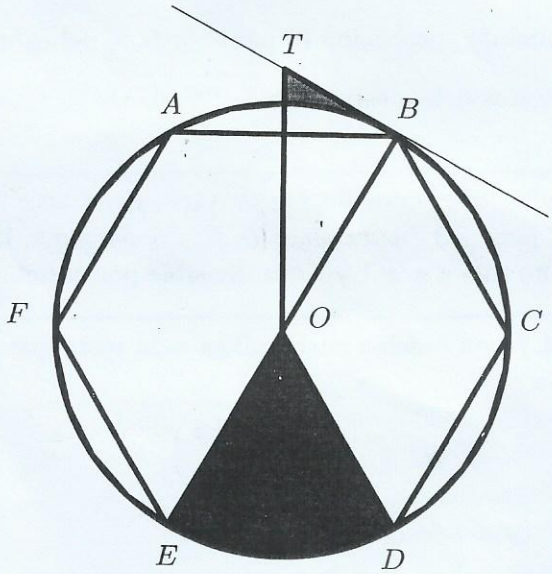
(b) Se lanza hacia arriba desde una altura de 25 metros una pelota con una velocidad inicial de $20\, m/s$. Determinar el módulo del vector velocidad en el instante que toca el suelo. (Considerar la acelaración de la gravedad, $|\vec{g}| = 10\, m/s^2$).

EJERCICIO 4: Sea $f: D_f \to \mathbb{R}/f(x) = \ln(3x-8) + \ln k$, donde k es una constante real positiva. Sea $g: D_g \to \mathbb{R}/g(x) = 2\ln(2x)$. Determinar todos los valores de k para los cuales las gráficas de f y g no se cortan. Escribir el resultado como un intervalo o unión de intervalos.

EJERCICIO 5: El hexágono regular $ABCDEF$ está inscripto en una circunferencia de centro en O y radio r. El segmento TB está contenido en la recta tangente a la circunferencia en el punto B y TO es perpendicular al lado AB. Sabiendo además que la suma de las áreas sombreadas es igual a

$$A = \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{\pi}{12}\right) r^2$$

y $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcular el valor de α.



Seminario Universitario — Final — tema 1 — 22-3-24

① Dados los polinomios $p(x) = (4\alpha+\beta)x^2+5x+3$

$q(x) = (x-3)(2x+1)$ y $r(x) = (\alpha-\beta)x^3+\gamma x-1$, determinar α, β y γ para que los polinomios p y q sean opuestos, r tenga como raíz a $x=1$ y r sea divisible por el polinomio $t(x) = 2x-4$

$x=1$ es raíz de $r(x) \Rightarrow r(1) = 0 = (\alpha-\beta)1^3+\gamma-1 = \boxed{\alpha-\beta+\gamma-1=0}$

$p(x) = -q(x) \Rightarrow$ $p(x) = (4\alpha+\beta)x^2+5x+3$

$q(x) = (x-3)(2x+1) = 2x^2\underbrace{+x-6x}_{-5x}-3$

$$\begin{cases} 4\alpha+\beta = -2 \\ -5 = -5 \\ 3 = -3 \end{cases} \rightarrow \boxed{4\alpha+\beta=-2} \qquad \boxed{\alpha-\beta+\gamma=1}$$

$r(x) = (\alpha-\beta)x^3+\gamma x-1$

$t(x) = 2x-4 = 2\underbrace{(x-2)}_{\text{raíz } 2}$

$t(x) \mid r(x)$

$\frac{r(2)}{2} = 0$

$r(2) = \frac{(\alpha-\beta)2^3}{2} + \frac{\gamma 2}{2} - \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 4\alpha+\beta = -2 \\ \alpha-\beta+\gamma = 1 \\ 4\alpha-4\beta+\gamma = 1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = -13/30 \\ \beta = -4/15 \\ \gamma = 7/6 \end{array}}$$

2) Sea f una función cuya gráfica es la recta que pasa por los puntos (3,0) y (5,1).
Sabiendo que:

$$(g\circ f^{-1})(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4} - 25}$$

a) Determinar el dominio de $g\circ f^{-1}$:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4} - 25 \geq 0 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+4} \geq 25 \Rightarrow 5^{-(2x+4)} \geq \overset{5^2}{25}$$

$$\frac{5^{-2x-4}}{5^2} \geq 1$$

$$\underbrace{5^{-2x-4-2} \geq 1}$$

$$-2x-6 \geq 0$$
$$-6 \geq 2x$$

$$\boxed{x \leq -3}$$

$$\boxed{D(g\circ f^{-1}) = (-\infty, -3]}$$

b) Resolver la ecuación $g(x) \cdot f^{-1}(x) = 0$

$$f(x) = y = ax+b \rightarrow (3,0) \rightarrow 0 = a.3+b \quad a = 1/2$$
$$(5,1) \rightarrow 1 = a5.+b \quad b = -3/2$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x \rightarrow x = 2y+3 \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = 2x+3}$$

$$g\circ f^{-1}(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{\underbrace{2x+4}_{2x+3+1}} - 25} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{f^{-1}(x)+1} - 25}$$

$$\boxed{g(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 25}}$$

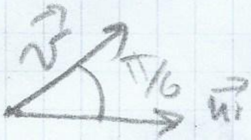
$$\underbrace{g(x)}_{=0} \cdot \underbrace{f^{-1}(x)}_{=0} = 0 \rightarrow f^{-1}(x) = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{2}} \rightarrow \notin \text{dom}$$

o

$$g(x) = 0 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 25 \rightarrow \boxed{x = -3}$$

Seminario Universitario — Final — Tema 1 — 22-3-24

(a) Los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ forman un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ radianes. Sabiendo que la longitud de $\vec{v}$ es igual a $\sqrt{3}$ y que $(\vec{v}-\vec{w})$ es ortogonal a $\vec{w}$, calcular el módulo de $\vec{w}$.



$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$$

$$(\vec{v}-\vec{w})\cdot\vec{w} = 0$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} - \vec{w}\,\vec{w} = 0 \Rightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{w}$$

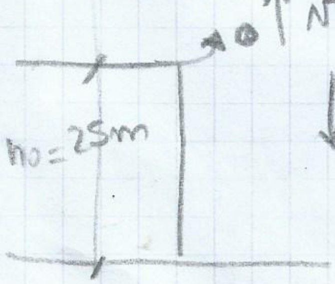
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\vec{w}\,\vec{w}}{\sqrt{3}\,\|\vec{w}\|} = \frac{\|\vec{w}\|^{\cancel{2}}}{\sqrt{3}\,\cancel{\|\vec{w}\|}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\|\vec{w}\| = \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\|\vec{w}\| = 3/2}$$

b) Se lanza hacia arriba desde una altura de 25 metros una pelota con una velocidad inicial de 20 m/s.
Determinar el módulo del vector velocidad en el instante que toca el suelo. $(|g| = 10\ m/s^2)$

$$y_{(t)} = 25m + 20\frac{m}{seg}\,t - 5\frac{m}{s^2}\,t^2$$



$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

t_{aire}: $y = 0 \rightarrow$

$$0 = 25 + 20t - 5t^2 \rightarrow t = 5\,seg$$

$$-10\frac{m}{seg^2} = \frac{v_f - 20\,m/seg}{5\,seg} \rightarrow \boxed{v_f = -30\ m/seg}$$

$$\boxed{|v_f| = 30\ m/seg}$$

(4) Sea $f : Df \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = \ln(3x-8) + \ln(k)$ donde k es una constante real positiva.
Sea $g : Dg \to \mathbb{R} \,/\, g(x) = 2\ln(2x)$, Determinar todos los valores de k para los cuales los gráficos de f y g no se corten
Escribir el resultado como un intervalo o unión de intervalos

Hallo $x \,/\, g = f$

$$g(x) = f(x)$$

$$2\ln(2x) = \ln(3x-8) + \ln(k)$$

$$\ln\left[(2x)^2\right] = \ln\left[(3x-8).k\right]$$

$$4x^2 = 3kx - 8k$$

$$4x^2 - 3kx + 8k = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

No tiene que tener raíces reales

$$\Rightarrow b^2 - 4ac < 0$$

$$(-3k)^2 - 4(4).8k < 0$$

$$9k^2 - 128k < 0$$

$9k^2 - 128k = 0 \to k = 0$

$\to k = \frac{128}{9}$

$$\boxed{k \in \left(0, \frac{128}{9}\right)}$$

Seminario Universitario — Final — tema 1 — 22-3-24

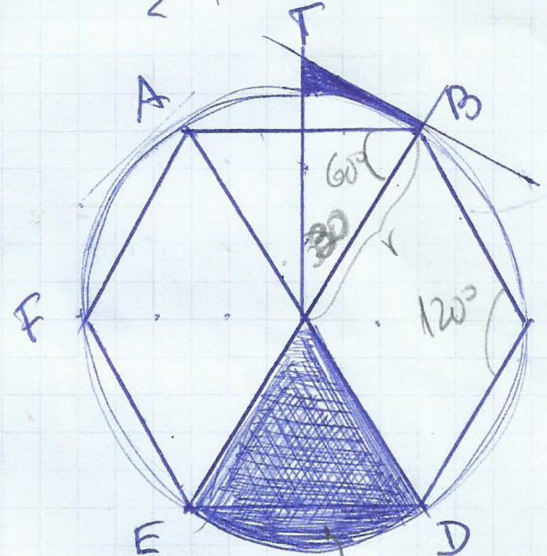
(5) El hexágono regular ABCDEF está inscripto en una circunferencia de centro O y radio r.

El segmento TB está contenido en la recta tangente a la circunferencia en el punto B y TO es perpendicular al lado AB.

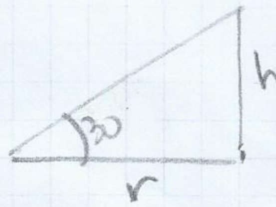
Sabiendo, además, que la suma de las áreas sombreadas es igual a

$$A=\left(\frac{1}{2}\,tg(\alpha)+\frac{\pi}{12}\right)r^2$$

y $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, calcular el valor de α



hexágono ⇒ triang. equiláteros



$$\frac{h}{r}=tg(30)$$

$$\boxed{h=tg(30).r}$$

$$\boxed{\frac{\pi.r^2}{6}=A}$$

$$A_\triangle=\frac{r.h}{2}$$

$$\boxed{A_\triangle=\frac{r.tg(30)\,r}{2}}$$

$$A_\triangle=\frac{\pi r^2}{12}$$

$$\boxed{\frac{r^2 tg(30)}{2}-\frac{\pi r^2}{12}=A}$$

$$A\ \text{sombr.}=\underbrace{\frac{\pi.r^2}{6}+\frac{r^2 tg(30)}{2}-\frac{\pi r^2}{12}}_{r^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{tg(30)}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=r^2\left(\frac{tg(30)}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}=\left(\frac{1}{2}tg(\alpha)+\frac{\pi}{12}\right)r^2$$

en rad

$$\boxed{\alpha=30^\circ}$$